

Подільність

Ознаки подільності:

- I. Ознака подільності на 2. Якщо запис натурального числа закінчується парною цифрою (2, 4, 6, 8, 0), то це число ділиться на 2 без остачі.
- II. Ознака подільності на 5. Якщо запис натурального числа закінчується цифрою 0 або 5, то це число ділиться на 5 без остачі.
- III. Ознака подільності на 10. Якщо запис натурального числа закінчується цифрою 0, то це число ділиться на 10 без остачі.
- IV. Ознака подільності на 3. Якщо сума цифр у записі натурального числа ділиться на 3, то це число ділиться на 3 без остачі.
- V. Ознака подільності на 9. Якщо сума цифр у записі натурального числа ділиться на 9, то це число ділиться на 9 без остачі.
- VI. Ознака подільності на 4. Натуральне число ділиться на 4, якщо дві останні цифри запису числа – нулі, або складають число, що ділиться на 4.
- VII. Ознака подільності на 8. Натуральне число ділиться на 8, якщо три останні цифри запису числа – нулі, або складають число, що ділиться на 8.

1. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.
2. Доведіть, що добуток п'яти послідовних натуральних чисел ділиться: а) на 30; б) на 120.
3. Нехай \overline{ab} позначає число з цифрами a і b . Доведіть, що $\overline{ab} + \overline{ba}$ ділиться на 11.
4. Доведіть, що число \overline{aaabbb} ділиться на 37.
5. У шестицифровому числі перша та четверта, друга та п'ята, третя та шоста цифри однакові. Доведіть, що це число кратне числам 7, 11 і 13.
6. Доведіть, що число $9^{2000} - 7^{2000}$ ділиться на 10.
7. У числі $101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 110$ порахували суму цифр. В отриманому числі знову порахували суму цифр і продовжували цей процес, доки не отримали одноцифрове число. Яке це число?
8. До числа 10 праворуч і ліворуч допишіть по одній цифрі так, щоб отримане число було кратне 36.
9. До числа 13 праворуч і ліворуч допишіть по одній цифрі так, щоб отримане число було кратне 45.
10. Знайдіть найменше натуральне число, що ділиться на 36, в записі якого трапляються всі десять цифр.

11. До деякого трицифрового числа праворуч дописали одну цифру і від одержаного числа відняли початкове. Виявилось, що різниця ділиться на 9. Яку цифру дописали?
12. Іринка несла на базар 2 кошики яєць. Її ненароком штовхнув чоловік, кошики впали, а яйця розбилися. Чоловік, щоб розрахуватися, запитав, скільки було всього яєць. Жінка відповіла: „Я їх не рахувала, але коли складала в кошики по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, то щоразу залишалося по одному яйцю, а коли складала по 7, то залишилося 2 яйця. Ще знаю, що у кожний кошик уміщається не більше 70 яєць.“ Скільки яєць було у кошиках?
13. Олег і Іринка виміряли одну й ту саму відстань у 143 м кроками, причому 20 разів їхні сліди збіглися. Знайдіть довжину кроку Олега, якщо вона вимірюється цілим числом сантиметрів, а крок Іринки дорівнює 55 см.
14. На дошці записано числа 1, 2, 3, ..., 2022. Дозволяється витерти будь-які два числа і замість них написати їх різницю. Внаслідок багаторазового повторення цієї операції на дошці залишиться одне число. Доведіть, що це число не може бути нулем.
15. Чи існують такі чотири натуральні числа, що кожне з них не ділиться націло на кожне з решти, а квадрат кожного із цих чисел ділиться націло на кожне з решти?
16. Знайдіть найменше число, записане лише одиницями, яке ділиться на 9999.
17. Знайдіть найменше число, записане лише одиницями, яке ділиться на $\underbrace{33 \dots 33}_{100 \text{ трійок}}$.
18. Чи існує восьмицифрове число, у записі якого всі цифри різні, яке ділиться націло на всі ці цифри?
19. Чи існує десятицифрове просте число, у записі якого всі цифри різні?
20. Відомо, що двадцятицифрове число є степенем числа 2. Доведіть, що серед цифр у його записі знайдеться три однакові.