

## Логічні задачі

**Задача № 1** Зустрілися декілька аборигенів, і кожен із них заявив всім іншим: „Ви всі – брехуни“. Скільки лицарів могло бути серед цих аборигенів?

**Розв'язання:** Якщо усі аборигени є брехуни, тоді кожен із них, сказавши фразу „ви всі брехуни“, скаже правду, що неможливо. Тому серед них точно є хоча б один лицар. Якщо цей лицар скаже цю фразу, то це означатиме, що решта аборигенів є брехунами. Більше ніж одного лицаря не може бути, оскільки, сказавши цю фразу, вони збрешуть, що не можливо. Тому серед аборигенів є один лицар.

**Задача № 2** Мудрець, відвідавши острів, зустрів двох жителів А і В і захотів дізнатися, хто вони. Він запитав у А: „Ви обидва лицарі?“ А відповів. Мудрець зрозумів, що він не може визначити, хто такі А і В, і задав ще одне питання: „Ви одного типу?“ А знову відповів, і мудрець зрозумів, до якого типу відносяться А і В. До якого ж?

**Розв'язання:** У таблиці вказані варіанти відповідей, які міг дати житель А на запитання мудреця. Оскільки мудрець не зміг визначити хто такі А і В після першого запитання, то це означає, що він почув відповідь „так“. Тому другий варіант нам не підходить. У трьох інших варіантах на друге запитання він двічі почує відповідь „так“ та один раз „ні“. Враховуючи те, що після цього запитання він зрозумів хто є хто, то він почув відповідь „ні“. Отже, А та В – брехуни.

А	В	відповідь А на перше запитання	відповідь А на друге запитання
лицар	лицар	так	так
лицар	брехун	ні	
брехун	лицар	так	так
брехун	брехун	так	ні

**Задача № 3** У конференції брало участь 100 чоловік: хіміки й алхіміки. Кожному було задане питання: „Якщо не рахувати Вас, то кого більше серед інших учасників – хіміків чи алхіміків?“ Коли опитали 51 учасника, і всі відповіли, що алхіміків більше, опитування перервалося. Алхіміки завжди брешуть, а хіміки завжди говорять правду. Скільки хіміків серед учасників?

**Розв'язання:** Розглянемо три випадки:

1) *Хіміків та алхіміків по 50.*

Кожен хімік на запитання в умові дасть відповідь: „алхіміків більше“, бо крім нього є 49 хіміків та 50 алхіміків.

Кожен алхімік на запитання в умові дасть відповідь: „алхіміків більше“, бо крім нього є 50 хіміків та 49 алхіміків.

Тобто, усі даватимуть однакову відповідь, яка задовольняє умову задачі.

2) *Хіміків  $\leq 49$  та алхіміків  $\geq 51$ .*

Кожен хімік на запитання в умові дасть відповідь: „алхіміків більше“, бо крім нього є не більше 48-ми хіміків та не менше 51-го алхіміка.

Кожен алхімік на запитання в умові дасть відповідь: „хіміків більше“, бо крім нього є не більше 49-ми хіміків та не менше 50-ти алхіміків.

У цьому випадку відповідь „алхіміків більше“ 51 раз ми не зможемо почути, бо її казатимуть лише хіміки, а їх не більше ніж 49.

3) *Хіміків  $\geq 51$  та алхіміків  $\leq 49$ .*

Кожен хімік на запитання в умові дасть відповідь: „хіміків більше“, бо крім нього є не менше 50-ти хіміків та не більше 49-ти алхіміків.

Кожен алхімік на запитання в умові дасть відповідь: „алхіміків більше“, бо крім нього є не менше 51-го хіміка та не більше 48-ми алхіміка.

У цьому випадку відповідь “алхіміків більше” 51 раз ми не зможемо почути, бо її казатимуть лише алхіміки, а їх не більше ніж 49.  
Тобто, можливий лише перший випадок, тому хіміків та алхіміків по 50.

**Задача № 4** На острові живуть Лев і Єдиноріг. Це дуже дивні істоти. Лев бреше по вівторках, середах, четвергах та говорить правду в решту днів тижня. Єдиноріг бреше по четвергах, п’ятницях, суботах та говорить правду в решту днів тижня. Ви зустріли Лева і Єдинорога, які відпочивають під деревом. Ті висловили наступні твердження:

**Лев:** Позавчора був один з днів, коли я брешу.

**Єдиноріг:** Позавчора був один з днів, коли я теж брешу.

В який день тижня це відбулося?

**Розв’язання:**

Запишемо умову задачі у вигляді таблиці, де “+” означатиме, що відповідна істота говорить правду у відповідний день, а “—” означатиме, що вона бреше.

	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П’ятниця	Субота	Неділя
Лев	+	—	—	—	+	+	+
Єдиноріг	+	+	+	—	—	—	+

Це я роблю для зручності, особисто мені так легше шукати відповідні дані, ніж у тексті. Цю таблицю ви можете використовувати для задач № 17 – 21, оскільки умови в них однакові, а відрізняються лише запитання.

Розв’яжемо цю задачу методом перебору також у вигляді таблиці, але “+” означатиме, що відповідна істота могла сказати це твердження у відповідний день, а “—” означатиме, що вона не може його сказати.

	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П’ятниця	Субота	Неділя
Лев	—	+	+	—	+	+	—
Єдиноріг	+	—	—	+	+	—	+

Нам підходить лише варіант у якому буде два “+”, тобто п’ятниця.

Прошу звернути увагу на те, що коли ви розв’яжете задачу методом перебору, то ви мусите доробити її до кінця, навіть після того, як ви знайшли розв’язок. В іншому випадку вам ніколи повністю не зарахують задачу. Інколи задача може мати два і більше розв’язки.

Також якщо якийсь варіант у якийсь момент вам вже не підходить, і ви це пояснили, то не обов’язково його до кінця перевіряти. Наприклад, у цій задачі можна було не перевіряти Єдинорога у понеділок, четвер та неділю після того, як ви перевірили Лева у ці дні.

**Задача № 5** Шість шахістів А, Б, В, Г, Д, Е зіграли в турнірі один з одним по одній партії. А звів усі партії внічию, Б не програв жодної партії, В виграв у переможця турніру і зіграв унічию з Д, Г випередив Д, але відстав від Е. Хто скільки очок набрав і яке місце зайняв?

**Розв’язання:** “+” означатиме перемогу, “—” поразку, а “н” нічию. Перемога дає учаснику одне очко, поразка – нуль, а нічия – 0,5 очка. Тому максимальна кількість очок, яку міг набрати кожен учасник дорівнює 5.

У таблиці № 1 вказані дані, які можна зразу внести з умови задачі. Оскільки В виграв у переможця турніру і зіграв унічию з Д, то В та Д точно не переможці. А та Б також не можуть бути переможцями, оскільки вони жодного разу не програли. Г відстав від Е, тому Е – переможець!

Оскільки Е зіграв в нічию з А (−0,5) та зазнав поразки від В (−1), то у нього вже  $\leq 3,5$  очки. Тому він не міг програти від Б, бо тоді та у А вже буде однакова кількість балів, а отже, він зіграв з ним у нічию. Тобто у нього вже не більше 3 очок, тому решту ігор він точно виграв.

Тому Б звів усі партії в нічию, оскільки мусить мати менше очок ніж Е.

Оскільки у В уже є 2,5 очка (див. таблиця № 2), то він мусить зазнати поразки від Г.

Тепер у Г 2 очки, а у Д 1,5, тому Г не може виграти у Д (бо матиме тоді 3 очки), а також не може програти від Д (бо тоді Д його випередить). Тому Г та Д зіграли в нічию.

Фінальні результати показані у таблиці № 4.

	А	Б	В	Г	Д	Е	кількість очок
А		н	н	н	н	н	2,5
Б	н						
В	н				н		
Г	н						
Д	н		н				
Е	н						

таблиця № 1

	А	Б	В	Г	Д	Е	кількість очок
А		н	н	н	н	н	2,5
Б	н		н	н	н	н	2,5
В	н	н			н	+	2,5
Г	н	н				−	1
Д	н	н	н			−	1,5
Е	н	н	−	+	+		3

таблиця № 2

	А	Б	В	Г	Д	Е	кількість очок
А		н	н	н	н	н	2,5
Б	н		н	н	н	н	2,5
В	н	н		−	н	+	2,5
Г	н	н	+			−	2
Д	н	н	н			−	1,5
Е	н	н	−	+	+		3

таблиця № 3

	А	Б	В	Г	Д	Е	кількість очок
А		н	н	н	н	н	2,5
Б	н		н	н	н	н	2,5
В	н	н		−	н	+	2,5
Г	н	н	+		н	−	2,5
Д	н	н	н	н		−	2
Е	н	н	−	+	+		3

таблиця № 4

**Задача № 6** По колу розташували 100 тягарців. Маса будь-яких двох сусідніх тягарців відрізняються на 1 кг. Доведіть, що тягарці можна розкласти на дві чаші шалькових терезів по 50 штук на кожну так, щоб терези були рівноваженими.

**Розв'язок:** Розіб'ємо тягарці на 50 пар, по два сусідні тягарці в кожній парі. Першу пару покладемо так, щоб важчий тягарець лежав на лівій чаші, а легший на правій, другу пару покладемо так, щоб легший тягарець лежав на лівій чаші, а важчий на правій, третю пару покладемо так, щоб важчий тягарець лежав на лівій чаші, а легший на правій тощо. Зрозуміло, що коли ми розкладемо усі 50 пар, терези будуть урівноважені.

**Задача № 7** У Святослава був набір з шести тягарців масами 1 кг, 2 кг, 3 кг, 4 кг, 5 кг, 6 кг, причому чим важчий була тагарець, тим більший був його розмір. Один з тягарців він загубив. Чи зможе Святослав визначити масу тягарця, якого він загубив, використовуючи лише шалькові терези? Відповідь обґрунтуйте.

**Розв'язок:** Отже, у нас залишилось 5 тягарців. Пронумеруємо їх числами від 1 до 5 починаючи з найлегшого та закінчуючи найважчим. На ліву шальку терезів ставимо тягарці з номерами 1, 2 та 3, а на праву – 5.

1) Якщо терези показують  $>$ , то це означає що забрали тягарець масою 5 кг або 4 кг. Тоді робимо друге зважування: на ліву шальку терезів ставимо тягарці з номерами 1 та 3, а на праву – 4. Тоді, якщо терези покажуть:

- а)  $=$ , тоді забрали тягарець масою 5 кг;
- б)  $<$ , тоді забрали тягарець масою 4 кг.

2)  $<$  – такий варіант неможливий

3) Якщо терези показують  $=$ , то це означає що забрали якийсь тягарець масою 1 кг, 2 кг або 3 кг. Тоді робимо друге зважування: на ліву шальку терезів ставимо тягарці з номерами 1 та 2, а на праву – 3. Тоді, якщо терези покажуть:

а)  $<$ , тоді забрали тягарець масою 3 кг;

б)  $=$ , тоді забрали тягарець масою 2 кг;

в)  $>$ , тоді забрали тягарець масою 1 кг.

**Задача № 8** Серед 80 однакових на вигляд монет одна фальшива (вона легша). Як за допомогою чотириразового використання шалькових терезів без тягарців знайти фальшиву монету?

**Розв'язок:** Для того, щоб мінімізувати кількість зважувань потрібно ділити монети на три однакових купки (або майже однакових, якщо їхня кількість не кратна трьом). Тому спочатку розіб'ємо на дві купки по 27 монет та одну на 26.

Першими на шалькові терези кладемо купки по 27 монет. Це зважування (перше) може дати два різних варіанти:

- $=$ , тоді легша монета серед 26-ти, що знаходяться на третій купці;

Розбиваємо 26 монет на три купки по 8, 9 та 9 монет у кожній. На шалькові терези кладемо купки по 9 монет. Це зважування (друге) може дати два різних варіанти:

- $=$ , тоді легша монета серед 8-ми, що знаходяться на третій купці;

Розбиваємо 8 монет на три купки по 2, 3 та 3 монети у кожній. На шалькові терези кладемо купки по 3 монети. Це зважування (третє) може дати два різних варіанти:

- $=$ , тоді легша монета серед 2-х, що знаходяться на третій купці;

Ставимо дані дві монети по одній на шалькові терези, і вони покажуть (четверте зважування), яка монета легша!!!

- $>$ , тоді легша монета серед 3-х, які легші.

Ставимо по одній монеті на шалькові терези. Це зважування (четверте) може дати два різних варіанти:

- ❖  $=$ , тоді легшою є третя монета!!!

- ❖  $>$ , тоді терези вказують на легшу монету!!!

- $>$ , тоді легша монета серед 9-ти, які легші;

Розбиваємо 9 монет на три купки по 3 монети у кожній. На шалькові терези кладемо дві купки по 3 монети. Це зважування (третє) може дати два різних варіанти:

- $=$ , тоді легша монета серед 3-х, що знаходяться на третій купці;

Ставимо по одній монеті на шалькові терези. Це зважування (четверте) може дати два різних варіанти:

- ❖  $=$ , тоді легшою є третя монета!!!

- ❖  $>$ , тоді терези вказують на легшу монету!!!

- $>$ , тоді легша монета серед 3-х, які легші.

Ставимо по одній монеті з легшої купки на шалькові терези. Це зважування (четверте) може дати два різних варіанти:

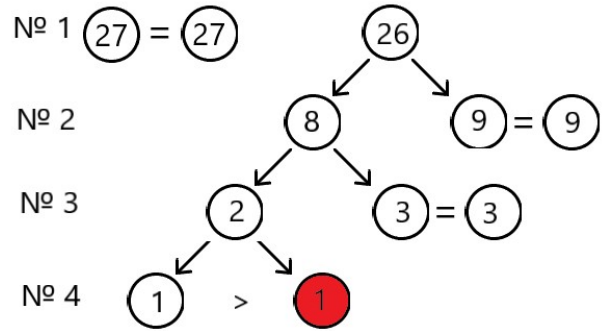
- ❖  $=$ , тоді легшою є третя монета!!!

- ❖  $>$ , тоді терези вказують на легшу монету!!!

- $>$ , тоді легша монета серед 27-ми, які легші.

У цьому випадку зважування проводимо аналогічні до попереднього.

Розв'язки таких задач можна оформляти і за допомогою малюнка. На малюнку праворуч зображено частину розв'язку даної задачі.



Розв'язки до задач на переливання дуже зручно показувати у вигляді таблиці. Записуючи кількість рідини в кожній посудині під час кожного кроку, можна з легкістю зрозуміти куди та скільки перелили рідини. Особливо уважним потрібно бути коли у вас обмежена кількість рідини. Тоді її не можна, наприклад, вилити з посудин. Розглянемо декілька задач.

**Задача № 9** Як, маючи лише дві посудини ємністю 4 і 9 л, набрати з річки 3 літри води?

посудина ємністю 4 л	0	4	0	4	0	4	3
посудина ємністю 9 л	0	0	4	4	8	8	9
річка	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

**Задача № 10** У бочці є не менше 10 л бензину. Як набрати з неї 6 л за допомогою двох посудин ємністю 9 і 5 л?

посудина ємністю 4 л	0	0	4	0	4	0	1	1	4
посудина ємністю 9 л	0	9	5	5	1	1	0	9	6
бочка	≥ 10	≥ 1	≥ 1	≥ 5	≥ 5	≥ 9	≥ 9	≥ 0	≥ 0

**Задача № 11** З допомогою посудин на 3 і 5 л розлити з посудини, наповненої до країв, 8 л рідини порівну.

посудина ємністю 3 л	0	0	3	0	2	2	3	0
посудина ємністю 5 л	0	5	2	2	0	5	4	4
посудина ємністю 8 л	8	3	3	6	6	1	1	4

### Задачі на самостійне опрацювання

- Шість шахістів А, Б, В, Г, Д, Е зіграли в турнірі кожний з кожним по одній партії. А звів усі партії внічию, Б не програв жодної партії, В виграв у переможця турніру і зіграв унічию з Д; Г випередив Д, але відстав від Е. Хто скільки очок набрав і яке місце зайняв?
- 7 шахістів зіграли в турнірі один з одним по одній партії. Переможець набрав удвічі більше очок, ніж разом троє, що посіли останні місця. Той, хто посів 4 місце, набрав 50% можливих очок. Як зіграли між собою той, хто зайняв друге місце, і той, хто зайняв третє місце?

3. За круглим столом сидять декілька лицарів і брехунів. Раптом кожний з них зробив заяву про свого сусіда справа про те, що вони одного племені. Скільки брехунів може сидіти за цим столом?
4. В одному дворі живуть четверо юнаків. Відомо, що Вадим і шофер старші за Сергія; Микола і слюсар захоплюються плаванням; бібліотекар – наймолодший з цих юнаків; увечері Антон і перукар грають у доміно проти Сергія і бібліотекаря. Визначити професію кожного з цих юнаків.
5. Трьох людей – А, В і С, один з яких брехун, один - лицар, і один - турист, виказують наступні твердження:  
А: В по рангу вище, ніж С.  
В: С по рангу вище, ніж А.
6. Потім у С питають: „Хто вище по рангу - А чи В?“ Що відповідь С?
7. На острові живуть Лев і Єдиноріг. Це дуже дивні істоти. Лев бреше по вівторках, середах, четвергах та говорить правду в решту днів тижня. Єдиноріг бреше по четвергах, п'ятницях, суботах та говорить правду в решту днів тижня. Ви зустріли Лева і Єдинорога, які відпочивають під деревом. Ті висловили наступні твердження:
  - Іншим разом Ви зустріли одного Лева. Він висловив два твердження:
    - 1) Я брехав вчора.
    - 2) Після завтрашнього дня я брехатиму два дні підряд.В який день тижня це трапилося?
  - В які дні тижня Єдиноріг може висловити наступні твердження:
    - 1) Я брехав позавчора.
    - 2) Я брехатиму післязавтра.
  - В які дні тижня Єдиноріг може висловити наступне єдине твердження: „Я брехав позавчора, і брехатиму післязавтра“?
  - На питання: „Який сьогодні день тижня?“ Лев відповів: „П'ятниця“, а Єдиноріг – „Вівторок“. В який день тижня це трапилося?
8. Як, маючи лише дві посудини на 5 і 7 л, розлити з каністри на 12 л бензин у баки двох автомобілів порівну?
9. Як, маючи два відра на 4 і 9 л, принести з річки 7 л води?