Відкрита олімпіада з математики. Розв'язки

1 5 клас.

5.1 Розріжте фігуру, що зображена темним на рис. 1.

а) на 4 однакові фігурки;

б) на дві фігурки, з яких можна скласти квадрат.

Різати можна лише по сторонам клітинок.

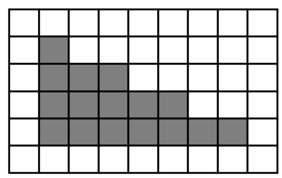

Рис. 1

Відповідь: приклади показані на рис. 2–3.

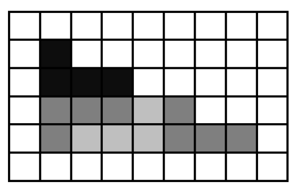

Рис. 2

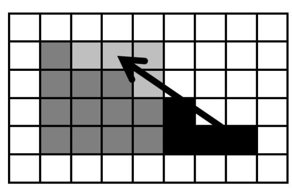

Рис. 3

5.2 На острові "Фізмат"живуть брехуни, які завжди брешуть та лицарі, які завжди кажуть правду. Одного ранку, три жителі острова, Андрій, Богдан та Василь, зустрілись разом. Андрій сказав: "Ми всі брехуни". Богдан натомість сказав, що "Тільки один із нас лицар". Хто серед цих трьох жителів може бути лицарем? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Тільки Богдан. Якби Андрій сказав правду, то він мав би бути і лицарем (оскільки сказав правду), і брехуном (з його твердження) водночас. Отже, Андрій брехун, а отже Богдан та/або Василь лицар(і). Якби Богдан збрехав, то лицарів тоді має бути два (оскільки Андрій брехун, їх може бути 0, 1 або 2; з твердження Андрія їх може бути 1 або 2; якщо Богдан збрехав, то залишається тільки 2). Тоді і Богдан, і Василь мають бути лицарями, але Богдан збрехав - супереченість. Отже, Богдан лицар і сказав правду. Відповідно, Василь брехун, оскільки з твердження Богдана серед них тільки один лицар.

5.3 Данило склеїв пазл рівно за 2 години, при цьому він за 1 хв склеював разом 2 шматочки – окремих чи вже раніше склеєних. За який час цей пазл склеїла б Женя, якщо вона може за хвилину склеювати 3 шматочки? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 1 годину. Данило робить одне склеювання за хвилину, а Женя — два. Отже, вона впорається вдвічі швидше.

5.4 Максим вважає, що рік є щасливим, якщо цифри, які його утворюють, є послідовними чотирма цифрами, які можуть бути записаними у будь-якому порядку. Наприклад, 2431 є щасливим. Які перші два роки є щасливими у XXI сторіччі (тобто після 2000 року) та два останні щасливі роки в XX сторіччі (тобто до 2000 року)? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 1423, 1432, 2013 та 2031. Для першої цифри 2 найменшим набором послідовних цифр будуть цифри 0,1,2 та 3. Далі залишається утворити з них найменше число: 2013 – найменший, наступний за ним: 2031. Для першої цифри 1 найбільшим набором цифр є 1,2,3 та 4, тому найбільшими з цих чисел є 1432, перед ним йде 1423.

5.5 Володя, Ярослав та їхні друзі за круглим столом їли горішки. Виявилося, що кожний з сидячих за столом з'їв або удвічі більше або на 6 менше ніж його сусід праворуч. Чи могли вони усі разом з'їсти 2025 горішків? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Ні. Розглянемо того, хто з'їв найменшу кількість горішків. Наприклад, це Володя. Тоді його сусід ліворуч не може з'їсти на 6 менше, а тому з'їв удвічі більше, тобто парну кількість. Але тоді, їдучі по колу, і кожний наступний ліворуч мав з'їсти парну кількість горішків. Тепер, коли ми дійдемо до гостя, який сидить праворуч від Володі. За умовою Володя, оскільки він з'їв найменшу кількість горішків, то він мав з'їсти на 6 горішків менше, а тому парну кількість. Таким чином усі мали з'їсти парну кількість горішків, тобто сумарна кількість горішків парна, що доводить неможливість з'їсти рівно 2025 горішків.

6.1 Задача 5.2.

6.2 Женя та Данило мають по декілька монет. Якщо Женя віддасть 2 свої монети Данилові, то в них стане однакова кількість монет. Якщо Данило віддасть 1 свою монету Жені, то в неї стане утричі більше монет, ніж у Данила. Скільки монет разом мають Данило та Женя? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 12. Нехай у Жені a монет, у Данила – b монет. Тоді, $a-2=b+2$, а також $a+1=3(b-1)$. Звідси можемо записати, що $a=b+4=3b-4 \implies 2b=8 \implies b=4, a=8 \implies a+b=12$.

6.3 Задача 5.5.

6.4 У кожній клітинці таблиці 100×100 записана одна з цифр від 1 до 9, але усі записані цифри приховані. З цифр цієї таблиці утворені 100-цифрові числа, що утворюються по рядках (зліва направо) та по стовпчиках (зверху донизу). Оксана хоче записати 100-цифрове число з цифр від 1 до 9, таке, щоб це число не співпадало з жодним з 200 чисел, що були утворені в таблиці. Яку найменшу кількість клітин Оксані треба відкрити та дізнатися записані там цифри, щоб досягти бажаного? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 100. Якщо перевірено менше ніж 100 клітин, то буде існувати певний рядок, в якому невідома жодна цифра, а тому гарантувати, що записане число не співпадатиме з ним, неможна. Покажемо, що Оксані достатньо знати цифри, що розташовані по діагоналі в таблиці. Далі вона просто пише число, у якого на i-му місці стояла цифра, що відрізняється від відомих цифр, що стоять у i-ому рядку. Таке число і буде відрізнятися від усіх 200 записаних чисел у відповідній позиції.

6.5 Скільки існує чотирицифрових чисел $\overline{abba}$, що діляться на число $\overline{bb}$, якщо цифри a та b можуть бути і різними, і однаковими? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Перепишемо задану умову таким чином: $\overline{abba} = 1001a + 110b \,\vdots\, \overline{bb} = 11b \Leftrightarrow 1001a \,\vdots\, 11b$. Оскільки $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то остання умова рівносильна такій: $7 \cdot 13a \,\vdots\, b$. Залишається розглянути можливі варіанти.

Варіант 1. $b = 1$ або $b = 7$, тоді а може приймати будь-яке ненульове значення, тобто маємо 18 чисел.

Варіант 2. $b \notin \{0, 1, 7\}$. Тоді має справджуватися умова $a \,\vdots\, b$. Тоді маємо, що:
при $b = 2a \in \{2, 4, 6, 8\}$, тобто 4 числа;
при $b = 3a \in \{3, 6, 9\}$, тобто 3 числа;
при $b = 4a \in \{4, 8\}$, тобто 2 числа;
при $b \in \{5, 6, 8, 9\}$, $a = b$, тобто ще 4 числа.
Разом маємо $18 + 13 = 31$ число.

7.1 Три квадрати зі сторонами 10, 8 та 6 розташовані таким чином, як це показане на рис. 4. Знайдіть площу темної частини фігурки, що утворилася. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

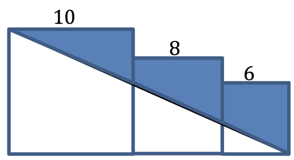

Рис. 4

Відповідь: 80. Добудуємо фігурку до прямокутника (рис. 5). Він має площу $(10+8+6) \cdot 10 = 240$. Синя фігурка за площею складає половину площі цього прямокутника, від якої ще треба відняти площу двох прямокутників 8×2 та 6×4. Таким чином остаточно маємо, що шукана площа дорівнює: $240 : 2 - 8 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = 80$.

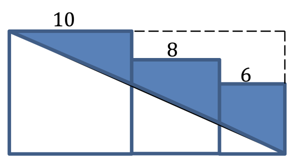

Рис. 5

7.2 Задача 5.5.

7.3 Цифри 1, 2, 3, 4, 5 та 6 розташовані в одному з квадратів знизу (рис. 6) (рівно одна цифра в один квадрат; усі цифри використано), так що операція множення є вірною. Яка цифра може бути розташована за знаком "?"? Для кожної такої цифри наведіть приклад правильної операції множення за даних умов. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

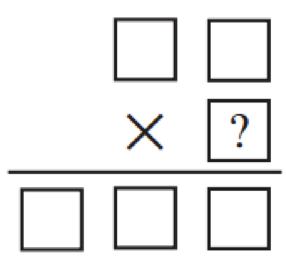

Рис. 6

Відповідь: 3. Приклад: $54 \times 3 = 162$. Покажемо, що інші числа не можуть бути під символом "?".

1: Зауважимо, що там не може бути одинички, оскільки, у результаті множення число з двохзначного стає трьохзначним.

2: Тоді отримане трьохзначне число є парним, а, отже завершується на 4 чи 6. Останньою цифрою двохзначного числа тоді може бути тільки 3, оскільки усі решта цифр при множенні на 2 не дають останньою цифрою 4 чи 6 ($2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 6 = 12$). Тоді залишається покласти 1, 4, та 5 на першу цифру двохзначного числа. Розглянемо всі варіанти: $13 \cdot 2 = 26$, $43 \cdot 2 = 86$, $53 \cdot 2 = 106$, жоден не задовільняє умови, суперечність.

4: Тоді отримане трьохзначне число є парним, а, отже завершується на 2 чи 6. Останньою цифрою двохзначного числа тоді може бути тільки 3, оскільки усі решта цифр при множенні на 2 не дають останньою цифрою 2 чи 6 ($4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 5 = 20$, $4 \cdot 6 = 24$). Тоді залишається покласти 1, 5 та 6 на першу цифру двохзначного числа. Розглянемо всі варіанти: $13 \cdot 4 = 56$, $53 \cdot 4 = 212$, $63 \cdot 4 = 252$, жоден не задовільняє умови, суперечність.

5: Тоді отримане трьохзначне число має ділитись на 5, а отже, має закінчуватись на 0 чи на 5, що неможливо, оскільки 5 вже використана, а 0 серед запропонованих цифр немає.

6: Тоді отримане трьохзначне число є парним, а, отже завершується на 2 чи 4. Однак, тоді не існує останньої цифри двохзначного числа, що нам підходить: $6 \cdot 1 = 6$, $6 \cdot 2 = 12$ та 2 вже використана, $6 \cdot 3 = 18$, $6 \cdot 4 = 24$ та 4 вже використана, $6 \cdot 5 = 30$.

7.4 У кожній клітинці таблиці 100×100 записана одна з цифр від 1 до 9, але усі записані цифри приховані. З цифр цієї таблиці утворені 100-цифрові числа, що утворюються по рядках (зліва направо) та по стовпчиках (зверху донизу). Оксана хоче записати 100-цифрове число з цифр від 1 до 9, таке, щоб це число не співпадало ні саме, ні записане задом наперед, з жодним з 200 чисел, що були утворені в таблиці. Яку найменшу кількість клітин Оксані треба відкрити та дізнатися записані там цифри, щоб досягти бажаного? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 100. Якщо перевірено менше ніж 100 клітин, то буде існувати певний рядок, в якому невідома жодна цифра, а тому гарантувати, що записане число не співпадатиме з ним, неможна. Покажемо, що Оксані достатньо знати цифри, що розташовані по діагоналі в таблиці. Далі вона просто пише число, у якого на i-му та на $(100 - i + 1)$-му місці стояла цифра, що відрізняється від відомих цифр, що стоять у i-й та $(100 - i + 1)$-й рядках. Таке число і буде відрізнятися від усіх 200 записаних чисел у відповідній позиції.

7.5 Натуральні числа $a < b < c$ задовольняють такі умови: $(a + b) \vdots (b - a)$ та $(c + b) \vdots (c - b)$, число a є 2024-цифровим, а число b – 2025-цифровим. Скільки цифр може мати число c? Для кожної відповіді наведіть приклад трійки чисел (a, b, c), що задовільняє умови. *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 2025. Оскільки $2a = (b + a) - (b - a) \vdots (b - a)$, то $b - a \leq 2a \implies b \leq 3a$. Аналогічно $c \leq 3b \leq 9a < 10a$, таким чином цифр буде не більше 2025, але їх не може бути менше, ніж цифр у числа b, яке є 2025-цифровим. Тому й число c має рівно 2025 цифр. Прикладом є числа $a = 999 \ldots 9$, $b = 100 \ldots 0$, $c = 100 \ldots 01$.